<https://fwjmath.wordpress.com/2015/09/15/the-limit-of-computation-8/>

<https://fwjmath.wordpress.com/2015/10/02/the-limit-of-computation-9/>

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Post/

We now think of Post as a mathematical logician but the first subject which attracted him was astronomy. While studying at the College of the City of New York he studied mathematics but there is little sign that at this stage he was particularly attracted towards logic. While an undergraduate at the College he wrote his first paper which was on generalised differentiation. The question he asked was a fascinating one: what does the differential operator D^{n}*Dn* mean when n*n* is not an integer? Although written while he was an undergraduate, Post did not submit the paper to the [American Mathematical Society](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Societies/AMS/) until 1923 and it was not finally published until 1930. It does contain a really important idea, for in the paper Post proves an important result about inverting the [Laplace](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace/) transform. This publication appeared long after Post's graduation with his first degree which was his B.S. awarded by the City College in 1917.

Post wrote a second paper as a postgraduate, which was published before his first paper, and this was a short work on the functional equation of the gamma function.

在完成高中与大学学业之后，在1917年，波斯特成为了哥伦比亚大学的一名博士生，跟随卡修斯·凯泽（Cassius Keyser）学习。这位凯泽也有过人之处，在当时美国数学界普遍偏向实用的氛围下，他却十分关心欧洲大陆关于数理逻辑的研究，这样的人在当时并不多。这大概因为凯泽自身非常关心哲学，甚至在哲学上也有不少的著作，于是他对于数学哲学与数理逻辑也是爱屋及乌。

凯泽对数理逻辑的热忱对波斯特影响很大，而那种更广泛的对数学与哲学的热情，可以在波斯特的师兄埃里克·贝尔（Eric Bell）身上看到。贝尔在数学研究上的贡献不大不小，在组合数学中，含有n个元素的集合拆分成子集的方法数被称为贝尔数，也有对应的贝尔多项式，这也许就是他最为人知的数学贡献了。但贝尔对数学的贡献远远超出了他的研究。他写了一本叫《Men of Mathematics》（中文译本叫《数学精英》或者《数学大师》）的书，讲述了众多知名数学家的故事。虽然这本书的描写过分夸张，而且过于关注数学家生活中的戏剧性，因而常常为数学家与数学史研究者所诟病，但这种写法同时也吸引了一代又一代的数学爱好者，有许多著名的数学家在少年时都深受这本书的影响。

在凯泽的指引下，波斯特在哥伦比亚大学简直如鱼得水。凯泽开设了一门研讨班，专门研究当时刚刚出版没几年的《数学原理》。这是一套厚厚的三卷本，但对于作者罗素（Bertrand Russell）与怀特黑德（Alfred North Whitehead）的宏大目标——将数学建立在毫无疑义的符号推演的基础上——来说，三卷实在有点薄。证据就是，他们等到第二卷，才证明了“1+1=2”，并且加上了评注：“以上命题有时会有用”（The above proposition is occasionally useful）。

这本数理逻辑的开山之作，不仅第一次展现了数学家追求确切无误的决心，也是类型论的首次登场。类型论不单是避免矛盾的工具，它触碰了计算的某些本质。那将是一个更颠覆常识的故事，但我们暂且按下不表。波斯特于是也开始研究《数学原理》的内容，作为博士论文的题目。

可以说，在数理逻辑这条道路上，波斯特一开始几乎是在独自前行。导师凯泽虽然对数理逻辑很有兴趣，但算是半路出家，除此之外，《数学原理》就是波斯特唯一的参照物。可以说，波斯特与丘奇一样，是美国土生土长的数理逻辑学家，他甚至比丘奇早几年进入这个领域，算是前辈。

三年如白驹过隙，但足以让波斯特深入当时数理逻辑的前沿。在他的博士论文中，他证明了《数学原理》中的命题演算是完备的，也就是说，在该系统内，真等价于可证明。作为逻辑系统，命题演算从属于一阶逻辑，所以波斯特的结果可以说是十年后的哥德尔完备性定理的前奏。

但波斯特的博士论文，价值远不止于此。

在《数学原理》中，罗素和怀特黑德殚精竭力建立了一个逻辑体系，这是他们的智力结晶，他们相信这是唯一的体系，所有其他数学都能奠基于此。但作为局外人的波斯特却看不到这种“唯一性”到底从何而来。在他眼中，逻辑体系可以是任意的，不一定要符合什么规则，可以拥有或多或少的代表不同意义的符号，甚至连“真”与“假”的二元对立都可以放弃。在论文的后半段，他研究了这一类“任意的”命题演算甚至是多值逻辑的一致性与完备性。虽然在现代，这种逻辑的自由观念已经深深融入了数理逻辑研究的精神，但在当时，这种想法可以说是开风气之先。

也许是因为这篇高质量的博士论文，刚毕业的波斯特获得了普林斯顿的垂青。图灵申请了两次才成功的同一份奖学金，波斯特甫一毕业就拿到了手。

接下来这博士后的一年硕果累累。

不同的逻辑体系有着不同的符号，即使是相同的符号，在不同的体系中也不一定有着相同的意义。如果我们希望找到一个能囊括所有逻辑体系的定义，那么，这个定义中显然不能包含“意义”。但一个剥除了意义的形式体系到底是什么？当“P 和P \to Q 可以推演出Q ”的这个规则剥除了它的意义，剩下的又是什么？一个证明，如果剥去它“证明某项真的陈述”的这一重意义，它又是什么？

但如果将形式证明的意义剥除，剩下的不就仅仅是一些无意义的、盲目的符号推演么？当我们看到P 和P \to Q ，我们就能写出Q ，仅此而已。本来这个逻辑体系是为了将日常生活中的推理形式化、精确化而存在的，现在要将“日常生活推理”这一意义抽去，只剩下符号搭成的框架，这不是舍本逐末吗？

的确，符号搭成的框架本身没有任何意义。但也正因如此，它可以承载任何意义。已有的逻辑体系蕴含着形形色色的意义，未有的逻辑体系可能蕴含着我们现在无法想象的意义。它们唯一的共同点，就是那个符号搭成的框架。公理就是作为起点的，由符号组成的公式；推理规则就是将一些符号串写成另一些符号串的机械规则；证明就是从公理出发，通过推理规则的不断改写，得到一个新公式的过程。如果有P 和P \to Q ，就写出Q ，丝毫不需要思考意义。而在另外一个逻辑体系，如果有P 和P \to Q ，就写出Q \to P ，这又有何不可？

这就是波斯特的答案：逻辑体系，不过是由一些符号、变量、起始符号串（公理）以及将这些符号串不断改写的规则（推理规则）。它们没有意义，但可以承载任何意义。通过对它们的研究，即使我们完全不知道某个逻辑体系的意义，也能通过对这些符号以及变换的研究，来得到关于这个逻辑体系的一些结论，比如它的一致性（是否存在一些不能写出的符号串），还有它的完备性（是否存在一个符号串，将它添加到起始符号串中就能改写出所有符号串）。只要研究这种完全形式化的符号系统，就能得出关于最广泛、最一般的逻辑体系的结论，无论它们的意义是什么。

他将这种符号改写的规则构成的系统称为“规范形式A”（canonical form A，涵盖了现代所谓的“字符串重写系统”），然后证明了所有取规范形式A的系统都能写成另一种包含更多约束的“规范形式B”。规范形式B允许的改写规则更简单也更弱，但它的“表达能力”与更强大的规范形式A相同。然后，波斯特证明了《数学原理》中的逻辑系统，实际上也能用这个弱得多的规范形式B表达出来，是规范形式B的一个特例。这意味着，做数学需要的推理规则，实际上要比罗素与怀特黑德想象的要简单得多。

虽然规范形式B很简单，但波斯特觉得它还不够简单，因为它仍然需要有无穷个表示变量的符号。他又定义了另一个“规范形式C”，它只需要有限个符号，但却能表达出规范形式B所表达的一切逻辑体系。在规范形式C中，波斯特又定义了所谓“正则形式”，在正则形式表达的逻辑体系中，只允许一种改写规则：如果符号串的开头是某一串特定的符号，那么将这些符号删去，然后在末尾添加另外一串符号。同样，所有能用规范形式C表达的逻辑体系，都能转化为正则形式。

我们来看一个正则形式的例子。符号有三个：a和b；起始符号串只有一条：“bb”；而规则仅仅有三条：

(1) a$ -> $a

(2) b$ -> $aba

(3) b$ -> $b

这里，$的意思是剩下的符号串，比如说a$ -> $a，就是说如果开头读到一个a，那么就去掉这个a，然后在符号串末尾加上一个a。如果开头是b，我们可以选择应用第二或者第三条规则，去掉b，然后续上aba或者b。很简单吧？

那么，通过这些规则，从公理开始，能改写出来的字符串又有哪些呢？

我们来看一个改写的例子：

bb -> baba (2)

-> abaaba (2)

-> baabaa (1)

-> aabaab (3)

-> abaaba (1)

-> baabaa (1)

-> aabaaaba (2)

-> abaaabaa (1)

也许你已经察觉到了这个简单的规律。我们注意到，每一条规则左右两边b的数量是相同的，因为公理只有“bb”，所以所有改写得到的符号串必然有两个符号b，它们将其余的a分成了扇段。再仔细观察上面的例子，容易发现两头a的数目加起来恰好是中间一段的a的数目。不难证明，所有可以写出来的符号串，恰好是形如a^m b a^{m+n} b a^{n} 的符号串，其中m与n都是正整数。或者可以说，这个形式系统表达了正整数的加法。很简单吧？

正则形式也许已经简单得不能再简单了，波斯特认为，这么简单的系统，要判断某个符号串是否能够写出来，看来也不是什么难事吧？但不要忘记，《数学原理》这本三卷本的巨著，它使用的逻辑体系也能归化为正则形式。就像图灵机一样，正则形式看似简单，但能力惊人。

波斯特甚至猜测，一切能用一个本质上有限的系统生成的符号串组成的集合，必定可以用一个正则形式体系生成；也就是说，正则形式体系涵盖了一切有限的符号生成系统，无论是已知的、未知的、过去的、未来的。这个猜测被称为“波斯特论题”（Post’s thesis）。这是一个大胆的猜测，要知道，数学家日常使用的逻辑，也只是一种有限的符号生成系统，只不过我们将这个系统生成的符号串称为“定理”，并且能给它们赋予“真”的意义而已。波斯特的猜测，实际上说的是正则形式体系覆盖了所有可能的数学推理体系。

这么大胆的猜测，难道不会隐藏着显而易见的问题吗？

我们可以假定所有考虑的正则形式系统都只有两个符号，因为通过两个符号的二进制组合我们可以表达别的符号。因为正则形式体系非常简单，我们能很容易地用自然数给它们编号，从1、2到无穷。给定某个编号，我们能机械地写出对应的正则形式体系。考虑一个集合D，它的元素是这样的符号串：用二进制的眼光来看，这个符号串对应一个自然数n，而编号为n的正则形式系统无法写出这个符号串。那么，是否存在一个正则形式体系T，它能写出的符号串的集合恰好就是D呢？

如果这样的T存在的话，它必定对应着一个编号n，而这个编号对应一个符号串S。S不可能属于D，否则按照D的定义，当S属于D时，对应的正则形式体系T必定无法生成S，而T应该写出D中的所有符号串，包括S，矛盾；而S又一定属于D，否则按照D的定义，当S不属于D时，T必定可以写出S，但T不应该写出D以外的任何符号串，包括S，矛盾。无论S是否属于D，引出的都是矛盾。于是，错误必定出现在一开始的假定上，也就是说，必然不存在这样的T，它恰好生成集合D。

这就是康托尔的对角线法，与图灵所用的如出一辙！

但如果对于任意的正则形式体系T与字符串S，我们都能证明T能否写出S的话，那么集合D必定可以用一个有限的系统生成，我们只需要针对所有自然数n，考察编号n的正则形式体系是否能写出n对应的字符串，这可以在有限的体系与有限的时间内做到。这又是一对矛盾。我们的论证中，必定有什么地方出了问题。

我们回过头来看看，这个矛盾用到了什么假设。仔细察看之后，我们能找到两个没有证明的假设：

假设一：一切本质上有限的系统生成的符号串集合，必定能用某个正则形式体系生成。

假设二：对于任意的正则形式体系T与符号串S，我们都能在有限时间内知道T能否写出S。

假设一是波斯特论题，假设二则源于因为我们认为正则形式非常简单。两个假设看上去都很有道理，假设一甚至更大胆一些。但如果将这两个假设放在一起，则不可避免地会导致矛盾。数学是不应该有矛盾的，二者必须择其一，甚至两者都可能是错的。那么，应该先放弃哪一个呢？

正则形式系统看上去是这么简单，毕竟眼见为实，要证明某个符号串能否写出来，似乎不是什么难事。但“本质上有限的系统”，涵盖的范围非常广阔，而正则形式看上去又那么简单，谁知道会不会有别的什么系统能做到正则形式做不到的事情呢？保险的做法，大概是放弃假设一，保留假设二。

但波斯特却反其道而行之。在此前对另一种同样简单的符号重写系统——所谓的“标记系统”（tag system）——的研究中，他发现对于很多看上去简单的问题，要找到答案不是那么容易的事。他猜想对于正则形式系统，也许我们原本认为的“简单问题”，实际上非常难解决。这些形式系统，并不像草原那样一览无遗，而更像是由形式操作构成的迷宫。他认为，实际上要放弃的应该是假设二，要保留的反而是他的假设一。

事实证明，他的选择是正确的。如果你对放弃假设二还有疑问的话，不妨试试以下的正则形式系统：

aa$ -> $bc  
ab$ -> $bc  
bc$ -> $a  
ca$ -> $aaa  
cb$ -> $aaa

如果你能找到一个起始符号串，使得这个形式系统可以写出无穷个不同的符号串的话，我可以保证，你的大名将会留在数学史上。

但放弃假设二也就相当于断言：存在某个正则形式体系T与符号串S，我们无法在有限时间内证明T能否写出S。可以说，这就是正则形式体系中的某种哥德尔不完备性定理：有些东西，我们不可能知道。

这是一个伟大的成就，波斯特在哥德尔之前10年就预见到了相似的结论。如果说哥德尔开创了一个新时代，那么波斯特当时则远远超越了时代。

波斯特虽然在1921年得到这个结果，但要等到1943年，在哥德尔、图灵、丘奇的黄金时代过去之后，才得以在极省略的篇幅下发表。

他没有跟上时代的节拍。

当时的美国数学界普遍对数理逻辑没有太大的兴趣，波斯特与他的导师凯泽在当时算是异类。要等到第二次世界大战前夕欧洲数学家大幅迁移到美国，这种状况才开始改变。波斯特曾经将他的想法写成上下两篇论文，并且将上篇提交到《数学年刊》（Annals of Mathematics）。但他得到的回复十分令人失望，同行评议的报告对是否应该发表各执一词，而编辑部也没有给出具体的决定。如果没有上篇的理论奠基，那么下篇就仅仅是空谈。

但无人问津还不是最致命的问题。实际上，波斯特根本没有一个实打实的证明。也就是说，他并没有实际证明他的结论，那只是一种推测再加上关于证明的一些想法而已。虽然以我们的后见之明来看，他的结论与想法都是正确的，但他毕竟没有一个能让别人详细检验的证明。

在数学界，证明就是一切。没有证明，即使看上去再确定无误的结论，哪怕拥有再多的间接证据，哪怕是最优秀的数学家的想法，都只能是猜想，而不是定理。要确立一个定理，就必须有一个滴水不漏的证明。这就是数学界的规则。而很不巧，波斯特的研究风格比图灵更依赖直觉，换种说法就是更不严谨。波斯特的直觉足以预见超越时代的结论，但他却没有对应的能力来将他的直觉在当下整理为严谨而有条理的证明。他的雄心壮志超越了哥德尔，甚至超越了图灵与丘奇，但他当时没有足够的工具，也没有足够的能力来完成这样远大的目标。

但也许波斯特多花些时间整理他的思路，就能写出完整的证明来说服数学界。可惜命运没有给他这样的机会。

就在波斯特取得突破之后不久，也许是由于这个结果的冲击性太大，他的心理失去了平衡。而论文未能成功发表更是为这种失常雪上加霜。他患上的是双相情感障碍，患者会在无端愉悦与无故抑郁中震荡。此后十多年，他一直受双相情感障碍的困扰，在数学上毫无产出，申请到的大学教职也因为发作而不得不放弃。这段时期，他只能当一名中学教师聊以糊口。直到1935年，他才算是回到了学术界。

从1921到1935，波斯特错过了哥德尔，错过了图灵和丘奇。在他迷惘之时，时代巨轮已经呼啸而过，他错过了数理逻辑的黄金年代。在1941年，他写了一篇文章，详细叙述了他此前在逻辑的不完备性方面的工作，投往了《美国数学期刊》。时任编辑赫尔曼·外尔（Hermann Weyl）拒绝了这篇文章：

我毫不怀疑在二十年前你的工作，部分由于它的革命性，没有得到应有的尊重。但我们无法将时针往回拨；在这段时间，哥德尔、丘奇与其他人完成了他们的工作，而美国数学期刊并不是发表历史回顾的地方。

对波斯特来说，错过时代节拍还不算是最大的打击。

当时人们对精神疾病的认识尚浅，没有确实有效的药物，没有确实有效的疗法，一切只能靠摸索。波斯特的双相情感障碍，同样没有标准疗法。当时的想法是，既然发作时出现的是狂喜和抑郁的极端情绪，那么就应该尽量避免这种极端情绪的发生，最好的方法就是限制会导致极端情绪的活动，对于波斯特来说就是数学。他的医生开出的疗法，就是限制波斯特做数学的时间：从下午四点到下午五点，用餐，然后从晚上七点到晚上九点，每天共计三小时。对热爱数学的数学家来说，这简直是能与精神疾病媲美的折磨，就像让美食家用牙签吃最爱的肉酱意粉，我不知道波斯特是如何忍受这种焦灼感的。

幸而波斯特并没有止步不前。他在症状缓解后很快重新投入到数理逻辑的研究中。在图灵刚发表他论述图灵机的论文后，波斯特在对图灵的研究毫不知情的情况下，发表了另一个与图灵机非常相似的模型，现在被称为波斯特机，它与我们常用的计算机更相似，驱动计算的与其说是状态的转移，不如说是语句的执行。他猜想波斯特机的计算能力与λ演算相同，这是个正确的猜测，但他当时无法证明这一点。图灵的桂冠并未因此旁落。而波斯特在看到图灵的构造与证明后也心服口服，他的探索再次失去了意义。他后来也考虑过图灵机在多维上的扩展，与后来的“元胞自动机”颇有相似之处。著名的“生命游戏”就是元胞自动机的一个例子。可惜他并没有发表这个想法。

之后，波斯特转到了布尔函数的研究，也就是那些变量与值都是“真”或者“假”的函数。在1941年，他发表了一个非常重要的结果：对于函数复合封闭的布尔函数类的分类定理。这些类别构成了一个被称为“格”的数学结构，现在被称为波斯特格。对于当时的研究者来说，波斯特的这个结果虽然很有意义，但研究的对象有些偏门，再加上波斯特典型的那种含混晦涩的行文风格，波斯特格这项成果在当时并没有得到太多的重视。要等到几十年后，人们研究约束满足问题时，波斯特格才重新回到人们的视线中。

在1944年，波斯特应邀在美国数学协会做了一场演讲。后来他将演讲的内容写成了论文并发表。他自己可能没有想到，这篇论文会成为他最有影响力的论文之一。这篇论文的题目是《递归可枚举的正整数集合与它们的判定问题》（Recursive enumerable sets of positive integers and their decision problems），它希望回答的问题非常简洁：停机问题有多难？有比停机问题容易的不可计算问题吗？

有时候错过时代节拍可能也是一件好事，起码对于波斯特而言，与主流的疏离给他带来了一种与众不同的视角。对他而言，判定问题的计算就是形式系统的推演证明，而形式系统的相互包含是一个非常自然的问题。比如说定义自然数的皮亚诺公理体系，就是一种形式系统，而这个系统中的所有命题都能翻译到集合论的策梅洛-弗兰克（ZF）公理体系中，能用皮亚诺公理证明的数学命题，在翻译后都能在ZF中证明。可以说，ZF体系包含了皮亚诺公理体系。那么，给定两个不同的公理体系A和B，我们自然希望考察它们的包含关系，比如说B是否包含A。也就是说，我们希望知道，是否存在一种方法，能将A中的命题翻译到B中，并且希望翻译后，在A中能证明的命题在B中仍然能证明。

波斯特的另一个优势，就是他之前的研究已经涉及到这样一些具体的翻译问题，只不过用的术语不是翻译，而是归约。从一般的形式系统到正则形式A，再到正则形式B，再到一种非常特殊的推演规则，这些都是归约。在关于形式系统不完备性的研究中，波斯特早已自己构造过许多这样的归约。从特殊的归约到一般的“归约”这个概念，对于数学家来说，仅仅是一步之遥。

为了简洁起见，波斯特并没有使用他的正则形式的概念，而是将计算问题表达为一个个由自然数组成的集合。对于数理逻辑学家来说，无论是形式系统、判定问题还是自然数组成的集合，本质上并没有什么不同。形式系统的命题可以用字符串表达，所以可以化为自然数，判断某个命题是否能从公理推演出来，也就相当于判断对应的自然数是否属于可推演命题对应的集合。而一个集合对应的判定问题，就是某个输入作为自然数是否处于这个集合中，所以，指定一个由自然数组成的集合，与指定一个判定问题是等价的。在这个框架下，归约的定义更方便更直观。

归约也有很多不同的种类，它们有强有弱。波斯特在研究形式系统是用到的归约，也就是上面所说的“公理体系之间的翻译”，是其中能力比较弱的一种，又叫“多一归约”（many-one reduction）。而最强的图灵归约在判断A中命题的正误时，可以在可计算的范围内任意生成B中的命题并得到解答，再从这些任意多的解答中提取结论。能获取的解答数目多了，自然也能解决更多问题，也就是说能力越强。

图灵归约是波斯特研究的最终目标，但它的能力太强，很难研究。所以在1944年的这篇论文中，波斯特主要研究的是更简单的多一归约和另一种稍微更强大的“真值表归约”。他证明了，在这两种归约方法定义的难度概念下，存在这样的计算问题，它们是不可计算的，但却比停机问题更容易。也就是说，如果按照这些归约定义的难度来排序，在可计算问题与停机问题之间，存在无数的“中间层级”。从可计算问题到停机问题迈出的这一步，实际上跨过了无数的层级。

波斯特在论文的结尾猜想，对于更强大的图灵归约，这样的“中间层级”也存在，不仅如此，其中有无数个中间层级是计算可枚举的。这并不显然，因为越强大的归约，越能填补不同问题之间难度的差距。比如说，多一归约认为问题A比问题B要难，但这可能是因为它本身太弱，如果换用图灵归约，也许就能通过多问几个问题得出答案。波斯特关于计算可枚举的“中间层级”是否存在的这个问题，又被称为波斯特问题。

波斯特的这篇论文的新观点和新结果最终引起了美国逻辑学家的注意，他终于获得了作为一个数理逻辑学家应有的赞赏。也许，他并不需要什么救济。

在那场演讲之后，在美国数学协会的聚会上，有个人叫住了波斯特。这个人叫克林，也是一位数理逻辑学家（一些读者可能还记得提出λ演算的丘奇就是他的博士导师）。他对波斯特说，有些东西想让他看看，并将波斯特邀请到了他的家中。

我们先来看看\Delta\_0 到底是什么。假设集合S是\Delta\_0 中的元素，那么存在一个只有单个自由变元的但没有量词的命题P(x)，某个自然数x属于S当且仅当P(x)为真。那么，对于某个特殊的自然数，比如说42，要判断它是否属于S，只需要将42代入命题P(x)中检查即可。既然P(x)没有量词，那么只要硬算，就必然能得到答案。也就是说，我们有一个算法，它一定会停止，而当它停止时，就能得到答案。记忆力好的读者能观察到，这种算法就是所谓的递归函数。

那么，\Sigma\_1 是什么呢？它涉及的命题拥有\exists a. P(x,a) 的形式，其中P(x,a)是一个\Delta\_0 中的命题，如果将a看成一个符号的话。那么，要判断这个命题对于某个特殊的x值是对是错，最直接的方法就是先将x值代入命题中，然后对于存在量词中的变量a，从0开始枚举每一个值，然后将这个值代入P(x,a)中，命题中就再也没有自由变量，可以直接硬算它是对是错。一旦找到了某个a的值，使得P(x,a)为真，那么根据存在量词的定义，我们就能判定整个命题为真；但如果命题对于我们的x值来说不为真，那么这样的a值不存在，我们就得一直枚举下去。这是一个不一定会停止的算法，但它仍然是一个算法，而它定义的集合也就是可计算的。

可以证明，停机问题相关的命题可以在更高的\Sigma\_2 层级中表达出来。

在图灵规约的框架下，可计算判定问题就是那些最“简单”的问题，它们组成了最“容易”的图灵度，被记作\boldsymbol{0} 。

那么，停机问题又如何呢？图灵证明了任意的图灵机都不能解决停机问题，同样，带有一个可计算谕示的谕示机当然也不能解决，因为这样的谕示机与一般的图灵机的计算能力是相同的。也就是说，停机问题不能规约到任何一个可计算的判定问题，也就是说，停机问题比那些可计算的问题要严格地难，或者说，停机问题与可计算问题不在同一个图灵度。所以，我们至少有两个图灵度，一个是可计算的\boldsymbol{0} ，另一个是停机问题所在的图灵度，记作\boldsymbol{0}' 。

那么，如何构筑更难的问题呢？

图灵在他的博士论文中发现，在停机问题不可计算的证明中，将所有的“图灵机”全部换成“带有‘数论问题’的谕示机”，其他部分不易一字，得到的证明仍然正确。从而他证明了所谓的“数论问题”并不包含所有的计算问题。在这里，图灵选取了“数论问题”这个谕示，但实际上，无论选取什么计算问题的谕示，将它代入原来的证明，得到的证明仍然成立。也就是说，对于任意的判定问题A，带有问题A谕示的谕示机是否会停机，这个判定问题是不能用带有问题A谕示的谕示机解决的。如果问题A是某个图灵度\boldsymbol{a} 中的判定问题之一，刚刚的判定问题必定属于某个更高的图灵度，我们将它记作\boldsymbol{a'} 。

（注：顺带一提，类似这样可以将“图灵机”换成“谕示机”的证明被称为可相对化的证明（relativizable proof）。这个概念的变体在P与NP问题中占据着重要的地位。更精确地说，在所谓的“多项式归约”的概念下，解决P与NP问题的证明不可能是可相对化的。这个结论又被称为“可相对化障碍”。）

这就是波斯特构筑越来越难的图灵度的方法。对于某个图灵度\boldsymbol{a} ，考虑带有其中问题之一的谕示的谕示机，有关的停机问题处于另一个更高的图灵度\boldsymbol{a'} ，这个图灵度被称为原来图灵度的图灵跳跃（Turing jump）。从可计算问题\boldsymbol{0} 开始，通过图灵跳跃，波斯特能够一步步构建与克林的算术层级相似的图灵度层级，除了最底层的\boldsymbol{0} 以外，每一个层级都对应着那些不可计算的问题，而且层级越高，问题越难。

实际上，波斯特的图灵度层级与克林的算术层级之间的联系，比我们想象中的更深刻。我们定义\boldsymbol{0}^{(n)} 为从最底层的\boldsymbol{0} 出发，经过n次图灵跳跃得到的图灵度。波斯特证明了，如果将判定问题与自然数集等同起来，那么可以说\boldsymbol{0}^{(n)} 恰好处于\Sigma\_{n+1} 和\Pi\_{n+1} 的交集之中。也就是说，图灵度层级实际上与算术层级紧密地缠结着，图灵度层级中的每一层恰好处于算术层级的两层之间。

波斯特很快就将他的部分发现以摘要的形式发表在1948年的《美国数学学会通报》上。克林读到了这篇摘要，自然为波斯特的新发现而兴奋，但他对这份摘要并非毫无意见。

数学家尽管做的都是数学，但他们的处事方式却是各式各样。在提笔写作方面，有的数学家勤于下笔，每获得了新的结果，就会很快写出论文，并通过期刊或者私下流通预印本的形式让同行尽快知道他的结果；有的数学家却惜字如金，即使有了一整套新结果，也记录了相关的定理和证明，但却迟迟不肯下笔，也许是希望更好地打磨这些结果。著名数学家埃尔德什和欧拉是前者的典型代表，两者分别是数学史上发表论文第一和第二多的数学家。而同样著名的高斯和怀尔斯则是后者的典型代表。高斯是个完美主义者，他希望他的著作中毫无瑕疵，“将所有的脚手架去掉”，于是他发现的结果往往在抽屉里一躺就是几年，直到高斯终于满意他的写作，或者别的数学家再次发现这个结果为止。而怀尔斯独自一人在八年时间内钻研，完成费马大定理的证明主体，这早已传为佳话，被认为是怀尔斯坚韧性格的证明。这些不同的风格，也许在不同的环境下有着不同的适应性，但却没有绝对的对与错之分。

波斯特属于惜字如金的那个类别，但与高斯和怀尔斯不同，他喜欢在发表的论文中提及他已经得到的结果，承诺会写出相关的论文，但这个承诺却迟迟不见兑现的踪影。在他发表的这篇摘要里，他除了提到上述超穷的层级结构之外，还提示了更多的结果。也许波斯特是想吊一下别的数学家的胃口，但对于同样在这个领域工作的人，这很不公平。如果你也是研究这个方向的学者，你读了波斯特的这篇文章，可能希望在这些结论上生发出更深入的定理。但因为这些结论的证明并没有正式发表，你并不知道波斯特的这些结论到底是有凭有据，还是仅仅是虚张声势，从而陷入想用但没法用的两难境地。更糟糕的是，如果你发现了相同的结论，希望发表的话，又会出现优先权之争，而这是大家都不希望看到的。无论如何，仅仅提示结果而长久拖延正式论文的发表，对学术整体的发展相当不利。

克林对波斯特这篇摘要的意见也正在于此。他给波斯特写了一封信，除了赞扬他的结果以及一些讨论之外，还提及了不发表的这个问题。克林的信也许使波斯特的良心有些不安，他很快给克林寄去了一份包含他的新结果的手稿。这份手稿延续着波斯特一直以来的风格：依赖直觉，不太严谨，结构也很凌乱。因为这是一份手稿，混乱程度更甚。波斯特自己可能也知道这一点，他给克林的建议是：找个研究生，让他把内容整理出来，然后以合作者的身份一起发表这篇文章。克林依计行事，但这份手稿实在是太难理解，克林找来的研究生实在无能为力，最后克林只好捋起袖子自己动手。

克林是丘奇的学生，也继承了丘奇的那种追求严谨的研究风格。当年丘奇对严谨性的要求曾经让更依赖直觉的图灵吃了不少苦头，这次轮到克林被波斯特的手稿中的各种直觉描述所困扰了。但最终，克林还是将手稿中的内容整理出来，将缺少的证明补齐，并且做了一些延伸的研究，最后写成了一篇论文：

《递归不可解度的上半格》（The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability）。

所谓的“递归不可解度”，其实就是不可计算的那些图灵度。而“上半格”是一种序结构。波斯特与克林证明了，所有图灵度其实组成了一个非常复杂但有序的结构。我们此前看到，通过图灵跳跃得到的图灵度层级与算术层级关系非常密切，但与算术层级不同的是，在每个图灵度层级之间，还有更加令人惊讶的结构存在，也就是说，阶梯与阶梯之间并不是空无一物，还有更多的结构蕴含其中。这也是显然的，因为自然数的子集有不可数无穷个，但每个图灵度中最多包含可数个子集。所以，图灵度的个数是不可数的，比我们想象中的无穷还要多得多。图灵度层级必然不能概括所有图灵度的结构，那么，必然有更多的结构存在于层级之间。

假设\boldsymbol{a} 是一个图灵度，而\boldsymbol{a'} 是它的图灵跳跃，我们来看看这两层阶梯之间到底有些什么。波斯特与克林证明了，\boldsymbol{a} 和\boldsymbol{a'} 之间，存在可数无穷个图灵度，它们之间互相不能比较，但都处于两层阶梯之间（用数学术语来说，就是两个图灵度之间至少存在一条可数无穷的反链）。同样在这两层阶梯之间，存在至少一条由图灵度构成的链，其中每个图灵度都可以相互比较，而更有趣的是，对于其中任意两个不同的图灵度，比如说\boldsymbol{c} 和\boldsymbol{d} ，假设\boldsymbol{c} 比\boldsymbol{d} 要难，那么这条链之中必定存在另一个图灵度，它的难度处于两者之间，比\boldsymbol{c} 要简单，但比\boldsymbol{d} 要难。用数学的术语来说，就是这条链是稠密的。也就是说，在图灵度层级之中的每两层之间，不仅存在着无数种方法从一层逐级攀登到另一层，而且在某些路径上，有一部分的路程不是常见的一级一级分立的阶梯，而是连续的无可割裂的斜坡。所有图灵度组成的结构，比我们能想像的还要复杂得多。

这篇论文，最终发表在久负盛名的《数学年刊》（Annals of Mathematics）上。可以说，它开创了图灵度研究这个新领域。到现在，图灵度理论已经成为了数理逻辑中非常活跃的一门分支

In 1924 Post went to Cornell but again became ill. He resumed work as a high school teacher in New York in 1927. He married Gertrude Singer in 1929 and they had one child, a daughter Phyllis. Then in 1932 he was appointed to the City College. He left after a short spell, again struggling with his mental illness, but returned three years later and spent the rest of his life there. At the City College his teaching load was 16 contact hours per week which made finding time for research very difficult. Also members of staff has no offices of their own but were all put in a single room with one large table in the middle. Post chose to work at home, but with a young child this put a strain on the family. Post's daughter Phyllis explained later in her life how Gertrude Post had struggled to give her husband the opportunity to devote time to research:-

*My father was a genius; my mother was a saint ... Besides typing letters of recommendation, my mother also typed my father's manuscripts and correspondence ... My mother was also the one who handled all financial matters ... she was the buffer in daily life that permitted my father to devote his attention to mathematics*(*as well as his varied interests in contemporary world affairs*)*. Would he have accomplished so much without her? I for one, don't think so.*

Post's early death at the age of 57 was almost certainly a direct consequence of the treatment he received for his mental illness. At that time such manic-depressive illnesses were treated with electric shock treatment. It was an horrific treatment for an horrific illness and one which caused great distress. It was based on nothing better than the fact that after patients received this treatment many had periods of more normal mental states. Post received the electric shock treatment on a number of occasions and it was while he was in a mental institution, shortly after receiving electric shocks, that he suffered a heart attack and died.

在1954年4月21日，波斯特接受了又一个疗程的电休克治疗。在他不停抽搐之时，他的心脏失去了控制。

他没有挺过去。

刊登着他和克林的论文的《数学年报》，则是在5月出版，只差不到一个月。

Post is best known for his work on polyadic groups, recursively enumerable sets, and degrees of unsolvability, as well as for his contribution to the unsolvability of problems in combinatorial mathematics. He introduced the concepts of completeness and consistency in a paper on truth-table methods which developed from the work of his doctoral thesis.

He also made a mathematical study of [Łukasiewicz](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lukasiewicz/)'s three-valued logic. At around this time he wrote in his diary:-

*I study Mathematics as a product of the human mind not as absolute.*

When [Gödel](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel/) published his Incompleteness Theorems in 1931, Post realised that he had waited too long to publish what he had proved and that now the whole credit would go to [Gödel](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel/). In a postcard written to [Gödel](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel/) in 1938, just after they had met for the first time, Post wrote:-

*... for fifteen years I carried around the thought of astounding the mathematical world with my unorthodox ideas, and meeting the man chiefly responsible for the vanishing of that dream rather carried me away. Since you seemed interested in my way of arriving at these new developments perhaps*[*Church*](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Church/)*can show you a long letter I wrote to him about them. As for any claims I might make perhaps the best I can say is that I would have proved*[*Gödel*](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel/)*'s Theorem in*1921*- had I been*[*Gödel*](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel/)*.*

In a follow-up letter written the day after he writes:-

*... after all it is not ideas but the execution of ideas that constitute a mark of greatness.*

In 1936 he proposed what is now known as a Post machine, a kind of automaton which predates the notion of a program which [von Neumann](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von_Neumann/) studied in 1946. In 1941 he wrote:-

*... mathematical thinking is, and must be, essentially creative...*

but he said there are limitations and symbolic logic is:-

*... the indisputable means for revealing and developing these limitations.*

Post showed that the word problem for [semigroups](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Glossary/#semigroup) was recursively insoluble in 1947, giving the solution to a problem which had been posed by [Thue](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thue/) in 1914.